2015 دورة الفصل الثاني

السؤال الأول

$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} , a, b \in R \right\}$

أثبت أن V تشكل مجموعة جزئية:

الحل

بعد استخدام الشرطين

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V , V \neq \emptyset$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & -a' \end{pmatrix}$

$\alpha , \beta \in R , \alpha A + \beta B = \alpha$

$= \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & -a' \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha b + \beta b' & -\alpha a - \beta a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ b'' & -a'' \end{pmatrix} \in V$

$a'' = \alpha a + \beta a' \in R$

$b'' = \alpha b + \beta b' \in R$

$\Leftarrow$ V مجموعة جزئية من $M_2(R)$

Scanned by CamScanner

* السؤال الثاني: $\mathbb{Z}$ مودول على ذاته

① $8\mathbb{Z} + 12\mathbb{Z}$ $8\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z}$

② أثبت أن $\mathbb{Z}$ لا يحوي مودولات أصغرية بينما تحوي مودولات أعظمية

③ بيّن إذا كان $\mathbb{Z}$ مودولاً نوثرياً أم آرتينياً.

الحل:

1) • المضاعف المشترك الأصغر $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = s\mathbb{Z}$

$8\mathbb{Z} \cap 12\mathbb{Z} = 24\mathbb{Z}$

العناصر المشتركة بين المجموعتين الأكبر

• القاسم المشترك $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$

$8\mathbb{Z} + 12\mathbb{Z} = 32\mathbb{Z}$

2) $\mathbb{Z}$ لا يحوي مودولات جزئية أصغرية لأن أي مودول جزئي من $\mathbb{Z}$ هو من الشكل $n\mathbb{Z}$ ومن أجل n $\mathbb{Z}n \supset \mathbb{Z}n^2 \supset \mathbb{Z}n^3 \supset \dots$ هذه السلسلة لا تتوقف من الأسفل ومن ثم لا يوجد مودول جزئي أصغري بينما $p\mathbb{Z}$ مع p أولي هو مودول أعظمي لأن لو كان $p\mathbb{Z}$ ليس أعظمياً لوجد $\mathbb{Z} \supset U \supset p\mathbb{Z}$ حيث $U = m\mathbb{Z}$ أي أن $m\mathbb{Z} \supseteq p\mathbb{Z}$ ومنه $m \mid p$ و p أولي $\Rightarrow m\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ $\Rightarrow M = p \wedge M = 1$

$p\mathbb{Z}$ أعظمي

③ • إن $\mathbb{Z}$ نوثري لأنه يحقق شرط السلسلة المتزايدة للمودولات الجزئية حيث p عدد أولي مثل p حيث أن المودول الجزئي $p\mathbb{Z}$ أعظمي في $\mathbb{Z}$ أي أن السلسلة تتوقف عند $p\mathbb{Z}$ أي أن $\mathbb{Z}$ نوثري في $\mathbb{Z}$

• إن $\mathbb{Z}$ ليس آرتينياً لأن السلسلة $\mathbb{Z} \supset \mathbb{Z}^1 \supset \mathbb{Z}^2 \supset \mathbb{Z}^3 \supset \dots \mathbb{Z}^n$ سلسلة متناقصة غير منتهية من المودولات الجزئية في $\mathbb{Z}$ أي أنها لا تتوقف عند الحد وبالتالي $\mathbb{Z}$ ليس آرتينياً

* السؤال الثالث:

أثبت أنه gf هومومورفيزم صفري $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ متتالية

ما دامت المتتالية تامة وبه أي متتالية جزئية $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ فعندئذ

$Im f = \ker g$

الحل

$gf : A \to C$ صفري

$(gf)(x)$ $\forall x \in A$

$(gf)(x) = g(f(x))$, $f(x) \in Im f = \ker g \Rightarrow f(x) \in \ker$

أي أن $g(f(x)) = 0$ ومنه $(gf)(x) = 0$ أي

(gf) سيكون هومومورفيزم صفري

ونثبت العكس

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

$\forall x \in A : (gf)(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = 0$

$\Rightarrow f(x) \in \ker g$

$\forall x \in M , f(x) \in Im f \Rightarrow Im f \subseteq \ker g$

وبما أن $f(x) =$ [illegible]

* السؤال الرابع

M موديول عام و N, L موديولات جزئية في M

$\theta : M/L \to M/L$

$\theta : (x+L) = x+N$

1) θ هومومورفيزم صفري

2) $(M/L)/(N/L) \cong M/N$

~~[crossed out]~~

الحل

1) $\forall x_1, x_2 \in M , x_1+L , x_2+L \in M$

$\theta[(x_1+L)+(x_2+L)] = \theta[(x_1+x_2)+L] = (x_1+x_2)+N$

$= (x_1+N)+(x_2+N) = \theta(x_1+N)+\theta(x_2+N)$

$\forall x \in M,\ \lambda \in R \Rightarrow \theta[\lambda(x+L)] = (\lambda x + L) = \lambda x + N$

$= \lambda(x+N)$

$= \lambda \cdot \theta(x+L)$

∴ θ هومومورفيزم متجهي

(2) $F: M\backslash L \longrightarrow M \backslash N$

$\forall \bar{x} \in M\backslash L \Rightarrow \exists m \in M,\ \bar{x} = m + L$

$\forall m_1 + L,\ m_2 + L \in M\backslash L,\ m_1 + L = m_2 + L \Rightarrow$

$(m_1 - m_2) \in L \subseteq N \Rightarrow$

$(m_1 - m_2) \in N \Rightarrow m_1 + N = m_2 + N$

$F(m_1 + L) = F(m_2 + L)$ ∴ F دالة

• نثبت أنه هومومورفيزم

$F[\alpha(m_1 + L) + \beta(m_2 + L)] \Rightarrow$

حسب برهنة الإيزومورفيزم

$F[\alpha(m_1 + L) + \beta(m_2 + L)] \Rightarrow$

حسب مبرهنة الإيزومورفيزمات الثالث

~~[illegible]~~

$M\backslash L / \ker f \cong M \backslash N$

• نثبت $M\backslash L = \ker f$

$\forall n + L \in N\backslash L \Rightarrow n \in N$

$f(n+L) = n + N \Rightarrow N + L \subset \ker f$

$\forall (m+L) \in \ker f \Rightarrow f(m+L) = m + N = N \Rightarrow m \in N$

$\Rightarrow m + L \in M\backslash L \Rightarrow \ker f \subseteq N\backslash L \in M\backslash L$

$\Rightarrow \ker f \subseteq N\backslash L \Rightarrow \ker f = N\backslash L$